

УДК 514.18

**К. П. Близнюк**

*(старший викладач кафедри «Теоретична та прикладна механіка»,  
Державний університет інфраструктури та технологій)*

### **ЗАСТОСУВАННЯ СПОСОБІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОЗИЦІЙНИХ ЗАДАЧ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ОБ'ЄКТІВ У СИСТЕМІ AUTOCAD**

*Способами нарисної геометрії на основі проекційних зображень визначено залежність параметрів конуса і січної площини від параметра параболі, утвореної як лінія перетину конуса площиною. Отримана залежність може бути використана при моделюванні поверхонь обертання у системі AutoCAD.*

*Ключові слова: поверхні обертання, конус, площина, параболі, визначники, залежність*

**Постановка проблеми.** Поверхні обертання, твірними яких є криві другого порядку, широко застосовуються у техніці і будівництві. Особливий інтерес становлять поверхні, створені на основі так званих конічних перерізів – еліпсів, парабол та гіпербол. При застосуванні методу прямого геометричного моделювання поверхонь, заснованому на методах обчислювальної геометрії, використовують інтегровані системи машинної геометрії, у яких графічний результат комп'ютерної інтерпретації геометричного алгоритму створюється автоматично [1]. Графічне моделювання з використанням універсальних комп'ютерних систем, таких як AutoCAD або КОМПАС, зреалізується поєднанням методів нарисної геометрії з комп'ютерними технологіями відображення. Поверхні обертання у таких системах можуть бути створені на основі заданої твірної і визначеної осі обертання, зокрема, для створення поверхні параболоїда обертання спочатку має бути створена параболі з заданими характеристиками. Остання версія системи КОМПАС-3D V16 має у своєму складі інструментальні засоби для побудови параболічних та гіперболічних кривих [2], а для системи AutoCAD доступними залишаються лише примітиви кола та еліпса. Твірні параболоїдів і гіперboloїдів будують сплайном, що проходить через точки, розраховані аналітичним шляхом. AutoCAD надає можливість для побудови окремих зображень, зокрема парабол та гіпербол, розробити спеціальну програму мовою LISP і вбудувати її у формі спеціального блоку [3]. Але привабливішим видається створення парабол і гіпербол «за їх походженням», тобто як ліній перетину конуса площиною при різних положеннях січної площини. При цьому підході мають бути визначені такі параметри конуса і площини, які забезпечать задані параметри лінії перерізу. **Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Ведуться активні пошуки простих способів автоматизації побудови ліній конічних перерізів. У роботах [4, 5]

© Близнюк К. П., 2018

досліджено криві, побудовані перетином конуса площиною та запропоновано способи генерації сплайнів на основі канонічних рівнянь. У роботах [6-8] наведені графічні методи, які дозволяють визначити взаємозв'язок між параметрами конуса та площини і отриманої кривої, але тільки після побудови цієї кривої за заданими параметрами вихідних фігур [9]. У роботі [9] запропоновано визначення параметрів конуса для створення заданого еліпса на основі теореми Монжа про подвійний дотик, стосовно параболи визначено лише залежність положення вершини конуса від створюваної кривої.

**Мета статті** – визначити взаємозв'язок між фокальним параметром параболи, кутом нахилу твірної конуса до осі та відстанню точки перетину січної площини від вершини конуса способами нарисної геометрії.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Визначення параметрів ліній перетину при заданих параметрах вихідних фігур за їх проєкційними зображеннями є однією з основних задач нарисної геометрії. Обернена задача – визначення параметрів вихідних фігур за параметрами ліній перетину – в нарисній геометрії не розглядалася, бо в більшості випадків вона не має однозначного розв'язку. Але для ліній конічних перерізів параметри всіх фігур пов'язані між собою певними залежностями, зокрема парабола утворюється при перетині конуса площиною, паралельною одній твірній конуса. При цьому парабола із заданими характеристиками при заданих параметрах конуса може бути утворена лише при одному положенні січної площини.

Визначниками конуса обертання (рис. 1) є його вісь  $i$  ( $i_2$ ) і твірна  $l$  ( $l_2$ ), конічна поверхня може бути задана кутом  $\varphi$  нахилу твірної до осі конуса. Січна площина  $\Theta$  ( $\Theta_2$ ) за умови паралельності її твірній конуса ( $\Theta \parallel l \rightarrow \Theta_2 \parallel l_2$ ) може бути задана відстанню  $h$  від вершини конуса  $S(S_2)$  до точки  $O'(O'_2)$  перетину площини з віссю конуса:  $S_2O'_2 = h$ . Визначниками параболи є фокус і директриса, відстань між якими називають фокальним параметром  $p$ .

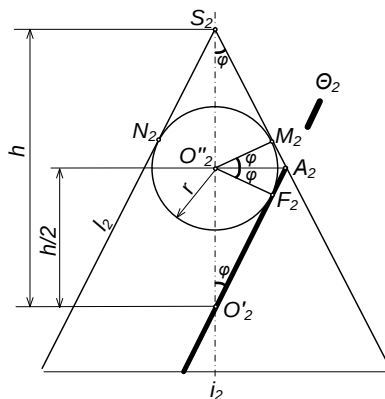


Рис. 1. Визначення залежності за теоремою Данделена

За теоремою Данделена [10] якщо сфера, вписана в конус, торкається одночасно і січної площини, то точка дотику на січній площині визначає фокус параболи. У прямокутному трикутнику  $A_2O''_2F_2$  кут при вершині дорівнює куту  $\varphi$  ( $O''_2M_2 \perp S_2A_2$ ,  $A_2O''_2 \perp O''_2S_2$ ):

$$\frac{A_2 F_2}{O_2'' F_2} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (1)$$

Відстань від вершини параболи до фокуса дорівнює половині фокального параметра:  $A_2 F_2 = p/2$ , а прилеглий катет  $O_2'' F_2$  дорівнює радіусу  $r$  вписаної сфери. Підставивши значення у формулу (1), отримаємо:

$$\frac{p/2}{r} = \operatorname{tg} \varphi; \text{ або } 2r = \frac{p}{\operatorname{tg} \varphi}. \quad (2)$$

У прямокутному трикутнику  $F_2 O_2' O_2''$  кут при вершині дорівнює  $\varphi$ :

$$\frac{O_2'' F_2}{O_2' O_2''} = \sin \varphi. \quad (3)$$

Гіпотенуза  $O_2' O_2''$  дорівнює половині відстані  $h$  ( $\Delta F_2 O_2' O_2'' = \Delta M_2 S_2 S_2 O_2''$ ). Підставивши значення у формулу (3), отримаємо:

$$\frac{r}{h/2} = \sin \varphi; \text{ або } h = \frac{2r}{\sin \varphi}. \quad (4)$$

Підставивши значення  $2r$  з (2) у (4), отримаємо:

$$h = \frac{p}{\operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \varphi}; \text{ або } h = \frac{p \cdot \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}. \quad (5)$$

Залежність може бути встановлена також за проекційними зображеннями фігур (рис. 2) на основі канонічного рівняння параболи  $y^2 = 2px$ .

Вводимо нову систему координат  $x', y'$  у площині перерізу (фігура  $C'E'A'D'B'$  є натуральною, або дійсною, величиною параболи). Для точки параболи  $D'$  координата  $y$  – це відстань від  $D'$  до осі  $x'$ :  $y_D = O'D' = y'_D$ , координата  $x$  – відстань до осі  $y'$ :  $x_D = A'O' = x'_D$ . З профільної проекції видно, що точка  $D$  ( $D_3$ ) є точкою дотику параболи до поверхні конуса на рівні точки  $O'$ , отже  $O'_3 D_3 = O'D' = O'_2 G_2$  (як радіус кола, утвореного на поверхні конуса при перетині його горизонтальною площиною, проведеною через точку  $O$ ).

У прямокутному трикутнику  $O_2' A_2 K_2$  кут при вершині дорівнює куту нахилу тірної конуса  $\varphi$ , катет  $O_2' K_2 = y/2$ , гіпотенуза  $O_2' A_2 = y^2/2p$  (з канонічного рівняння параболи). Маємо залежність:

$$\frac{y/2}{y^2/2p} = \sin \varphi, \quad \frac{y \cdot 2p}{2y^2} = \sin \varphi, \quad \frac{p}{y} = \sin \varphi, \quad y = \frac{p}{\sin \varphi}. \quad (6)$$

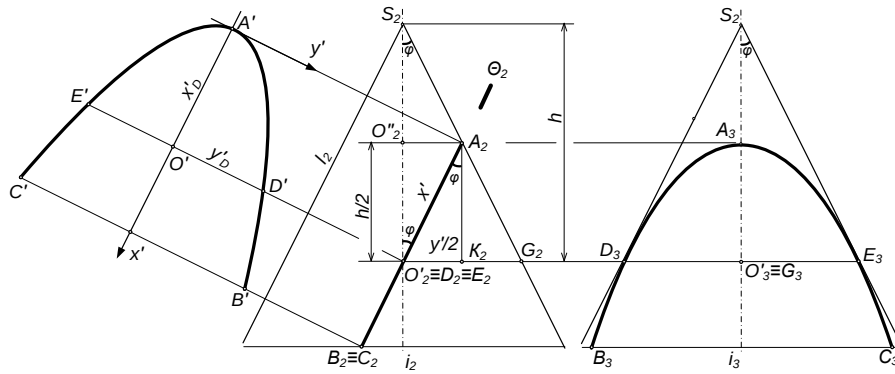


Рис. 2. Визначення залежності за канонічним рівнянням

Катет трикутника  $K_2A_2 = O'_2 O''_2 = h/2$  (трикутник  $O'_2 S_2A_2$  – рівнобедрений,  $O''_2A_2 \perp O'_2 S_2$ ). Звідси:

$$\frac{y/2}{h/2} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{y}{h} = \operatorname{tg} \varphi, \quad h = \frac{y}{\operatorname{tg} \varphi}. \quad (7)$$

Підставивши значення  $y$  з (6) у (7), отримаємо:

$$h = \frac{p}{\operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \varphi}; \text{ або } h = \frac{p \cdot \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}. \quad (8)$$

Ідентичність залежностей (5) і (8) дає підстави стверджувати, що для заданих параметрів конуса і площини парабола як лінія їх взаємного перетину визначається однозначно.

**Висновки та пропозиції.** Отримана залежність дає можливість для будь-якого значення кута нахилу твірної до осі конуса  $\varphi$  ( $0 < \varphi < 90^\circ$ ) визначити такий параметр січної площини  $h$ , який забезпечить утворення параболи з заданим фокальним параметром  $p$ . Залежність може бути використана при моделюванні поверхонь обертання у системі *AutoCAD*.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бойко, В. А. Комп'ютерне геометричне моделювання у професійній проектно-конструкторській діяльності / В. А. Бойко // Молодь і ринок : щоміс. наук.-пед. журн. / Дрогобиц. держ. пед. ун-т ім. Івана Франка. – Дрогобиц. : Дрогобиц. держ. пед. ун-т ім. Івана Франка, 2016. – № 3. – С. 145–150
2. Золотарєва, Д. А. Разработка методических рекомендаций по моделированию параболоида и гиперболоида средствами программы КОМПАС-3D V16 / Д. А. Золотарєва, К. Е. Кравцова // Инженерная графика и трехмерное моделирование. Молодежная научно-практическая конференция [Текст] : сб. научных докладов (16 декабря 2016 г., Новосибирск). – Новосибирск : СГУГиТ, 2017. – С. 46–49
3. Короткий, В. А. Синтетические алгоритмы построения кривой второго порядка / В. А. Короткий // Вестник компьютерных и информационных технологий. – М.: ООО «Издательский дом «Спектр» 2014. – № 11. – С. 20–24.
4. Карабчевський, В. В. Визначення параметрів канонічних рівнянь конічних перерізів у середовищі *AutoCAD*. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Вип. 4, т. 35 – Мелітополь: ТДАТА, 2006. – С. 114–119.

5. *Карабчевский, В. В.* Моделирование кривых второго порядка в среде AUTOCAD. / Донецкий национальный технический университет, e-mail: karabch@pmi.dgtu.donetsk.ua
6. *Середа, І. В.* Парабола – як крива конічної поверхні / І. В.Середа, Н. І. Грицина // MICROCAD 2013. Тези доповідей XXI Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта». – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – С. 51.
7. *Середа, І. В.* Конічні криві в конструкторських системах. / І. В.Середа, Н. І. Грицина, Є. О. Іванов, В. А. Любарський //MICROCAD 2014. Тези доповідей XXII Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я». – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – С.53.
8. *Грицина, Н. І.* Визначення параметрів конуса, на поверхні якого є криві із заданими характеристиками / Н. І. Грицина, І. В. Середа // Сучасні проблеми геометричного моделювання: зб. наук. праць. – Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014. – Вип. 2. – С. 30-35.
9. *Грицина, Н. І.* Дослідження теореми Монжа про подвійний дотик поверхонь / Н. І. Грицина // Сучасні проблеми моделювання. – 2016. – Вип. 7. – С. 48-51.
10. *Начертательная геометрия: Учебник* / Н. Ф. Четверухин, В. С. Левицкий, З. И. Прянишникова, А. М. Тевлин, Г. И. Федотов; Издание второе, переработанное и дополненное. Под редакцией проф. Н. Ф. Четверухина. – М.: Государственное издательство «Высшая школа»,– 1963. – С. 271.

## REFERENCES

1. Boiko, V. A. *Komp'iuterne geometrychne modeliuвання u profesiinii proektno-konstruktorskii diialnosti* / V. A. Boiko // Molod i rynok : shshomis. nauk.-ped. gurn./ Drogobys. derg. ped. un-t im. Ivana Franka. – Drogobych : Drogobys. derg. ped. un-t im. Ivana Franka, 2016g. № 3. – S.145–150
2. Zolotarëva, D. A. *Razrabotka metodicheskikh rekomendatsiy po modelirovaniyu paraboloyda y gypربولoyda sredstvamy programmy KOMPAS-3D V16* / D. A. Zolotarëva, K. E. Kravtsova // Yngenernaia grafyka y trekhmerno modelirovaniye. Molodegnaia nauchno-praktycheskaia konferentsiya [Tekst] : sb. nauchnykh dokladov (16 dekabria 2016 g., Novosybyrsk). – Novosybyrsk : SGUGyT, 2017. – S. 46-49
3. Korotkyi, V. A. *Syntetycheskye algorytmy postroyeniya kryvoi vtorogo poriadka* / V. A. Korotkyi // Vestnyk kompiuternykh y ynformatsyonnykh tekhnologiy. – М.: ООО «Yzdatelskyi dom «Spektr», 2014. – №11. – S. 20-24..
4. Karabchevskiy, V. V. *Vyznachennia parametriv kanonichnykh rivnian konichnykh pereriziv u seredivyshshi AutoCAD*. // Prykladna geometriia ta ingenerna grafika. Pratsi Tavriiskoi dergavnoi agrotekhnichnoi akademii. – Vyp. 4, t. 35 – Melitopol: TDATA, 2006. – S. 114 –119.
5. Karabchevskiy, V. V. *Modelirovaniye kryvykh vtorogo poriadka v srede AUTOCAD*. / Donetskiy natsionalnyi tekhnicheskyy unyversytet, e-mail: karabch@pmi.dgtu.donetsk.ua
6. Sereda, I. V. *Parabola – iak kryva konichnoi poverkhni* / I. V.Sereda, N. I. Grytsyna // MICROCAD 2013. Tezy dopovidei KHKHI Mignarodnoi naukovopraktychnoi konferentsii «Informatsiini tekhnologii: nauka, tekhnika, tekhnologii, osvita». – KHarkiv: NTU «KHPI», 2013. – S. 51.
7. Sereda, I. V. *Konichni kryvi v konstruktorskykh systemakh*. / I. V. Sereda, N. I. Grytsyna, Є. О. Іванов, В. А. Любарський //MICROCAD 2014. Tezy dopovidei KHKHII Mignarodnoi naukovopraktychnoi konferentsii «Informatsiini tekhnologii: nauka, tekhnika, tekhnologii, osvita, zdorov'ia». – KHarkiv: NTU «KHPI», 2014. – S. 53.
8. Grytsyna, N. I. *Vyznachennia parametriv konusa, na poverkhni yakogo є kryvi iz zadanymy kharakterystykamy* / N. I. Grytsyna, I. V. Sereda //Suchasni problemy geometrychnogo modeliuвання: zb. nauk. prats. –Melitopol: MDPU im. B. KHmelnytskogo, 2014. – Vyp. 2. – S. 30-35.
9. Grytsyna, N. I. *Doslidgennia teoremy Monga pro podviinyi dotyk poverkhon* / N. I. Grytsyna // Suchasni problemy modeliuвання. – 2016. – Vyp. 7. – S. 48-51.
10. Nachertatelnaia geometriya: Uchebnyk / N. F. CHetverukhyn, V. S. Levytskyi, Z. Y. Prianyshnykova, A. M. Tevlyn, G. Y. Fedotov; Yzdanye vtoroe, pererabotannoe y dopolnennoe. Pod redaktsiei prof. N. F. CHetverukhyna. – М.: Gosudarstvennoe yzdatelstvo «Vysshiaia shkola»,– 1963. – 271 s.

**К. П. Близнюк**

*(старший преподаватель кафедры «Теоретическая и прикладная механика»,  
Государственный университет инфраструктуры и технологий)*

### **ПРИМЕНЕНИЕ СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ ПОЗИЦИОННЫХ ЗАДАЧ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ОБЪЕКТОВ В СИСТЕМЕ AUTOCAD**

*Способами начертательной геометрии на основании проекционных изображений определена зависимость параметров конуса и секущей плоскости от параметра параболы, образованной как линия пересечения конуса плоскостью. Полученная зависимость может быть использована при моделировании поверхностей вращения в системе AutoCAD.*

*Ключевые слова:* поверхности вращения, конус, плоскость, парабола, определители, зависимость.

**Kateryna Blyzniuk**

*(Senior Lecturer, Department of Theoretical and Engineering Mechanics, State University of Infrastructure and Technologies)*

### **APPLICATION OF THE METHOD FOR THE DESCRIPTIVE GEOMETRY POSITION PROBLEMS SOLVING FOR MODELING WITH THE AUTOCAD SYSTEM**

*To simulate the surfaces in the AutoCAD system with the technique of rotation, pre-create a curve that will be generated by this surface. The curve is constructed either with the use of primitives (circle, ellipse), or by analytically determined points of the curve, which can be approximated by the spline. For curves of the second order (ellipses, hyperbola, parabola), it is possible to construct them as lines of conical sections. In this case, such a cone and a plane must be constructed, which in the intersection will create a curve with given parameters. The dependence of the parameters of the cone and the plane on the parameters of the formed parabola is proposed to be determined by methods of descriptive geometry on the basis of projective images. The study was based on the Dundelin theorem on the determination a parabola focus as a point of tangency of the inscribed sphere to the cut plane. Trigonometric ratio are obtained by the frontal projection of the figures at the position that of the cut plane is perpendicular to the projection plane. An identical dependence is also derived using the profile projection of figures for the situation when the parabola is touched to the outline constituents. The introduction of a new coordinate system at in the plane of the cross-section made it possible to establish the ratio of the elements of the figures according to the canonical equation of the parabola. The obtained ratio can be used at modeling process of surfaces with AutoCAD system by the technique of conical surface.*

*Keywords:* surfaces of revolution, cone, plane, parabola, determinants, ratio.

Стаття надійшла до редакції 28.11.2017 р.